

Estensione dell'algoritmo di estrazione dei grafi di Reeb a superfici tridimensionali

Silvia Biasotti

Rapporto tecnico IMA n° 14/00

Estensione dell'algoritmo di estrazione dei grafi di Reeb a superfici tridimensionali.

1 Introduzione

In computer graphics il trattamento e la visualizzazione di enormi quantità di dati e la loro trasmissione digitale richiedono la definizione di modelli di rappresentazione che siano in grado di dare un'interpretazione ad "alto livello" degli oggetti da rappresentare e distinguerne automaticamente le caratteristiche principali. Tale genere di modelli si distingue da quelli cosiddetti a basso livello (come ad esempio le griglie e le triangolazioni) perché consente di stabilire una gerarchia tra le informazioni memorizzate. In questo modo si ottiene una rappresentazione degli oggetti di tipo multi-risolutivo e elementi con un preciso significato morfologico e/o topologico possono essere immediatamente evidenziati, [1]. L'obiettivo di tali tecniche di modellazione è garantire un conciso, efficiente, flessibile e controllabile meccanismo per descrivere e animare i modelli di oggetti complessi.

Nell'ambito della modellazione geometrica la topologia computazionale può essere utilizzata sia in fase di interrogazione che di controllo dei modelli; nella modellazione di superfici, ad esempio, notevole importanza ha assunto la conoscenza degli strumenti offerti dalla topologia differenziale e dalla geometria, quali l'equazione di Eulero, i numeri di Betti, la teoria di Morse, i grafi di Reeb. Il grafo di Reeb, in particolare, si è rivelato un ottimo strumento per la rappresentazione di superfici tridimensionali in quanto consente la rappresentazione topologica di oggetto basandosi semplicemente sull'evoluzione delle sue sezioni. Un algoritmo efficiente per l'estrazione del grafo di Reeb per superfici 2,5D rappresentate attraverso una triangolazione è già stato presentato in [4][8][18]. In questo rapporto tecnico viene presentata l'estensione del metodo presentato in [18] a superfici tridimensionali chiuse. La principale difficoltà che si riscontra in tale estensione è dovuta al fatto che una triangolazione 3D vincolata ai contorni richiede la conoscenza, a priori, della topologia e del collegamento tra i singoli contorni. Questo problema risulta di difficile risoluzione, [16] e in generale non risolubile, la nostra idea per superare tale problema è di considerare un approccio basato sulla ri-triangolazione della superficie originale facendo in modo che alla fine del processo tutti i vertici appartengano ad una sezione. Terminata tale operazione, si può nuovamente considerare la caratterizzazione della superficie proposta per superfici 2,5D e quindi si può nuovamente assumere che i punti critici siano individuati dalla presenza di aree piatte sulla triangolazione. Partendo dalla caratterizzazione della triangolazione così ottenuta, si discuterà, poi, della possibile estensione della tradizionale

regola di Eulero alla caratterizzazione delle superfici già presentata in [18] e [9]. La parte restante del rapporto è organizzata come segue: prima di tutto una breve sezione riservata all'introduzione teorica del grafo di Reeb e della teoria di Morse dalla quale esso deriva, quindi la descrizione del metodo di costruzione del grafo per superfici 2.5D e la sua estensione a superfici tridimensionali. Seguirà, poi, una sezione dedicata alla discussione della caratterizzazione ottenuta e, infine, esempi e conclusioni.

2 Teoria di Morse e grafi di Reeb

L'idea alla base della topologia è lo studio delle proprietà di forma invarianti per deformazione, [2], [3]. Per garantire che durante la trasformazione non si creino tagli o buchi sulla superficie le deformazioni consentite devono essere sia bigettive che bicontinue.

La teoria di Morse consente lo studio delle relazioni che intercorrono tra i punti critici di una funzione definita su una superficie e il suo dominio, [1]. Tale teoria garantisce che per descrivere la topologia di una varietà differenziabile compatta sono necessarie solo poche

informazioni basate sulla conoscenza dei punti critici. Essa, infatti, non indica solo le variazioni del tipo topologico della superficie bensì anche quale genere di cambio avviene. Assumendo che una superficie possa essere rappresentata attraverso una varietà differenziabile bidimensionale, la teoria di Morse è uno strumento fondamentale per l'analisi topologica delle superfici. Tale teoria riveste notevole importanza nello studio del comportamento di una superficie in relazione ai propri punti critici. Per chiarire l'idea di punto critico di una superficie a cui in seguito si fa riferimento ne viene proposta la definizione.

Sia f una funzione a valori reali, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, definita su una varietà differenziabile M i cui punti p possano essere rappresentati nella forma $p=(x, y, z)$ e tale che $f(p)=z$ allora si definisce p punto critico della funzione se vale la relazione $f(p)=0$.

Nella teoria di Morse si richiede, inoltre, che ciascun punto critico sulla superficie sia non degenere, ossia che il determinante della matrice Hessiana calcolata in tale punto sia non nullo (la matrice Hessiana per la funzione f è la matrice formata dalle derivate parziali del secondo ordine). Esempi di punti critici degeneri sono mostrati in **Fig. 1**, in particolare in (a) viene mostrato un esempio di punto di sella quadruplo e in (b) una circonferenza completamente composta da punti di massimo. Se la superficie verifica le ipotesi precedentemente fatte, il tipo del cambio topologico della superficie è determinato dalla conoscenza del tipo di punto critico presente, cioè dal numero di autovalori negativi della matrice Hessiana, calcolata nel punto stesso. Coerentemente con il numero di autovalori

negativi della matrice Hessiana i punti critici non degeneri di una superficie sono classificati di tipo 0 , 1 , 2 . In questo modo è possibile codificare la superficie in un grafo in cui ciascun nodo rappresenta un diverso tipo di cambio topologico: tale grafo può essere esteso al caso n -dimensionale ed è conosciuto nell'ambito della topologia algebrica con nome di CW-complex, [2].

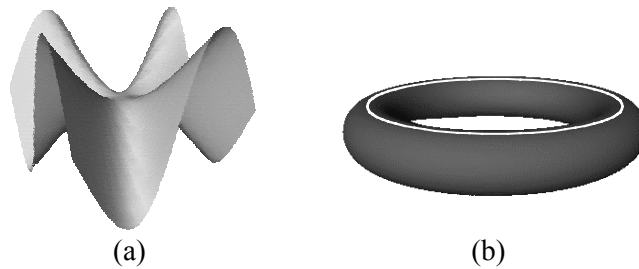


Fig. 1 Esempi di punti critici degeneri.

Applicazioni della nozione di punto critico e della teoria di Morse sono state fatte in vari campi della computer grafica quali la rappresentazione di superfici implicite, di meshes poligonali [4], di volumi discreti e di superfici naturali [5], [6].

Una delle maggiori difficoltà che si incontrano nell'applicazione di tali strumenti teorici è la necessità di adattare concetti sviluppati per varietà differenziabili a modelli di superfici solo continui. Diversi autori hanno sottolineato l'importanza di modelli di questo genere, con caratteristiche differenti secondo il contesto applicativo: Nackman, [7], ha proposto un grafo di configurazione dei punti caratteristici che permette una classificazione della forma delle superfici lisce in alcuni tipi particolari basandosi sul tipo di curvatura delle regioni. In ambito geografico un concetto simile a quello di Nackman è stato proposto da Pfaltz [8], in cui si suggerisce l'uso di un modello a grafo i cui nodi detto surface-network. Falcidieno e Spagnuolo, [9], hanno proposto l'utilizzo di un grafo di configurazione delle regioni di curvatura uniforme che corrisponde ad una composizione della forma della superficie in regioni di forma semplice.

Un ulteriore possibile modello di rappresentazione di una superficie, considerato da Kunii et al., [5], [6], può essere basato sull'estrazione di sezioni piane e nella conseguente codifica in un grafo detto di Reeb. Un modello di questo genere si propone di studiare la struttura della superficie attraverso l'analisi dell'evoluzione delle sezioni piane: questo risulta particolarmente vantaggioso in problemi in cui è necessario evidenziare la struttura topologica della superficie. Una rappresentazione a sezioni, inoltre, risulta, per l'utente, più semplice da interpretare in quanto consente di visualizzare meglio la quota delle superfici da analizzare.

Un altro metodo per ricostruire la superficie a partire da sezioni è stato proposto da Giertsen et al., [11]; l'informazione topologica contenuta nella struttura da loro proposta, comunque, non consente di esprimere univocamente le relazioni di adiacenza tra i contorni e può essere espressa in maniera più efficace dal grafo di Reeb.

A partire dalla nozione di varietà differenziabile, nel 1946, Reeb ha definito un grafo topologico, ottenibile come uno spazio topologico quoziente, che, rispetto a una buona funzione a valori reali ne definisce lo scheletro, [10].

Definizione: Sia $f : M \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione reale a valori reali definita su varietà differenziabile compatta M . Allora il grafo di Reeb di M rispetto alla funzione f è lo spazio quoziente dello spazio $M \times \mathcal{R}$ definito dalla relazione di equivalenza “ \sim ”, data da:

$$(X_1, f(X_1)) \sim (X_2, f(X_2)) \Leftrightarrow f(X_1) = f(X_2) \text{ e } X_1 \text{ e } X_2 \text{ giacciono sulla stessa componente connessa di } f^{-1}(f(X_1)).$$

Se ad esempio si considera la funzione altezza $f(M)$ definita sulla superficie $M=(x, y, z)$ (e quindi $f(x, y, z)=z$) il grafo di Reeb è lo spazio quoziente dato dalla relazione di equivalenza che identifica i punti $x_1=(x_1, y_1, z)$ e $x_2=(x_2, y_2, z)$ se giacciono sulla stessa componente connessa della sezione effettuata a quota z . Lo spazio topologico così ottenuto quoziente può essere considerato un **CPG** (Critical Point Graph). Nella rappresentazione grafica del grafo di Reeb i nodi corrispondono ai punti critici e gli archi provengono dalla parte di superficie strettamente situata tra due livelli critici. Dalla teoria di Morse, infatti, si ricava che la topologia di una superficie varia solo in corrispondenza di un punto critico. La rappresentazione del grafo di Reeb risulta particolarmente semplice nel caso la funzione altezza non presenti punti critici degeneri. Fissata la direzione della funzione altezza il grafo di Reeb è un'efficiente rappresentazione dello scheletro di un oggetto. La conoscenza di tale grafo acquista particolare rilevanza sia nei problemi di semplificazione del modello stesso che di compressione dei dati in quanto garantisce l'integrità topologica delle trasformazioni. In **Fig. 2** è mostrato il grafo di Reeb di un bi-toro rispetto alla naturale funzione altezza.

L'ipotesi di non degenericità della funzione altezza, purtroppo, non è garantita quando si analizzano modelli derivanti da insiemi di dati discreti. Ad esempio nell'analisi di oggetti rappresentati attraverso l'uso di superfici poliedrali il problema di individuare quali siano i punti critici di una superficie, pur essendo di notevole interesse, non è ancora stato univocamente risolto. A questo riguardo si propone un metodo di classificazione morfologico della superficie che, dove la superficie verifichi le ipotesi necessarie, rispetti la

definizione teorica di punto critico altrimenti la estenda, coerentemente con l'idea comune di punto critico, alle configurazioni degeneri. Questo consente di trattare in maniera efficiente anche superfici morfologicamente complesse, caratterizzate da aree piatte estese, tipiche di manufatti.

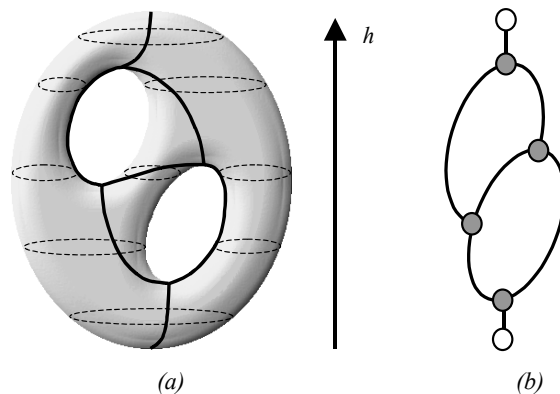


Fig. 2 Grafo di Reeb di un bi-toro effettuato rispetto alla funzione altezza h : le classi di equivalenza sono evidenziate in grassetto sulla superficie (a) mentre in (b) è mostrato il grafo corrispondente contenente solo i punti giacenti sui contorni.

La struttura di grafo topologico individuata dal grafo di Reeb, comunque, al pari del grafo utilizzato da Giertsen et al., [11], non consente di memorizzare esplicitamente le corrispondenze tra i punti delle sezioni adiacenti. Tale struttura, infatti, pur garantendo un'efficiente compressione delle informazioni topologiche contenute nel modello è povera di informazioni nella fase inversa di ricostruzione della superficie. Nel processo di ricostruzione, infatti, oltre a conoscere l'adiacenza topologica tra le sezioni è opportuno aver presente anche come queste sezioni devono essere collegate e quali sono i punti che “ragionevolmente” è più opportuno collegare tra loro.

3 Extended Reeb Graph (ERG)

Data una triangolazione che rappresenta una varietà differenziale chiusa e orientabile ci si propone di estrarre un grafo topologico avente le stesse proprietà del grafo di Reeb. Un metodo per la costruzione automatica di un'estensione del grafo di Reeb (Extended Reeb Graph, ERG), a partire da un insieme di sezioni rappresentanti una superficie 2.5D, è stata presentata in [13], [14]. Punto di partenza dell'ERG è la diretta applicazione della definizione di grafo di Reeb a superfici poliedrali generiche, in modo tale da estendere la nozione di grafo di Reeb anche a punti critici degeneri e a funzioni altezza non Morse. L'efficacia di tale modello, quindi, è dovuta alla capacità di trattare, in maniera sostanzialmente omogenea, situazioni usualmente considerate degeneri e, quindi, non considerate. L'idea alla base di questa rappresentazione estesa è che, al fine di avere una

descrizione delle caratteristiche di una superficie poliedrale il più globale possibile, risulta più conveniente considerare *aree critiche* anziché punti critici. A partire da tali aree critiche, poi, si possono individuare quelle regioni sulla superficie che completamente individuano i cambi di topologia, le cosiddette *zone di influenza*. Tali zone di influenza determinano i nodi dell'ERG e sono i punti di partenza per l'individuazione degli archi del grafo.

Qui di seguito il metodo di costruzione e di caratterizzazione della triangolazione proposto viene analizzato più in dettaglio. Prima di tutto si richiede il calcolo di un numero sufficientemente denso di sezioni e, attraverso un algoritmo di re-mesh sulla triangolazione, si impone che tutti i punti finali appartengano alle sezioni stesse e i lati siano tali da non intersecare i contorni precedentemente calcolati.

A differenza di quanto accade per superfici 2.5D per l'estrazione dell'ERG di superfici effettivamente 3D il processo di “rimescolamento” dei punti sulla triangolazione è necessario in quanto non è possibile determinare a priori quando e come due contorni appartenenti a sezioni diverse debbano essere collegati, [16][8]. Per garantire la correttezza della triangolazione finale ed essere sicuri di aver “tagliato” la superficie con un numero sufficiente di sezioni i punti originali vengono rimossi e lasciati solo i punti trovati. In questo modo la triangolazione risultante è topologicamente equivalente a quella originale e ogni suo punto appartiene a qualche contorno; inoltre il modello ottenuto si riconduce a quello presentato in [18]. In **Fig. 3** viene visivamente rappresentato il processo di estrazione della triangolazione vincolata.

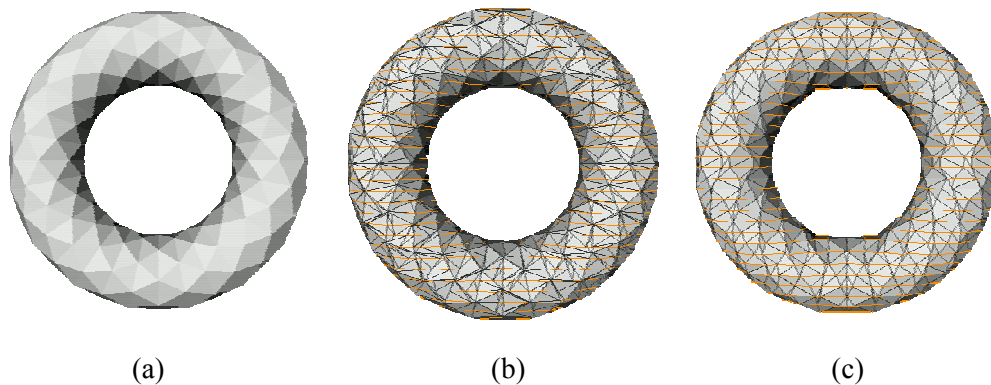


Fig. 3 A partire da una triangolazione 3D (a), vengono inseriti i punti ottenuti dal sezionamento (b) e la triangolazione vincolata finale (c)

Sulla triangolazione (vincolata ai contorni) ottenuta, è possibile caratterizzare come aree di *massimo* o *minimo* quelle regioni circondate da un unico contorno, [18] [1]. La discriminazione tra aree di massimo e minimo viene fatta in base al comportamento dei

triangoli esterni alla regioni in esame. Siccome il bordo di tali aree è formato da un unico contorno è possibile analizzare il comportamento all'esterno della regione analizzando un unico triangolo avente un lato in comune con il contorno e un vertice non appartenente allo stesso. Per quanto riguarda le aree di sella, in generale, esse sono caratterizzate dal fatto di avere i vertici alla stessa quota, ma appartenenti a contorni diversi (esempio in **Fig. 4(a)**) oppure sono composte da due triangoli non adiacenti il cui lato in comune è piatto, [18], [8] ed esempio in **Fig. 4(b)**. Il metodo di caratterizzazione consente, inoltre, di considerare aree critiche sia semplicemente che multiplamente connesse: ad esempio in **Fig. 4(c)** viene mostrata di area critica (che è classificata come massimo) non semplicemente connessa. Le aree multiplamente connesse di massimo (risp. minimo) si distinguono dalle aree di sella in quanto il loro bordo è formato interamente da 2 o più contorni aventi stessa quota e verificando i triangoli esterni all'area (un triangolo per ogni contorno).

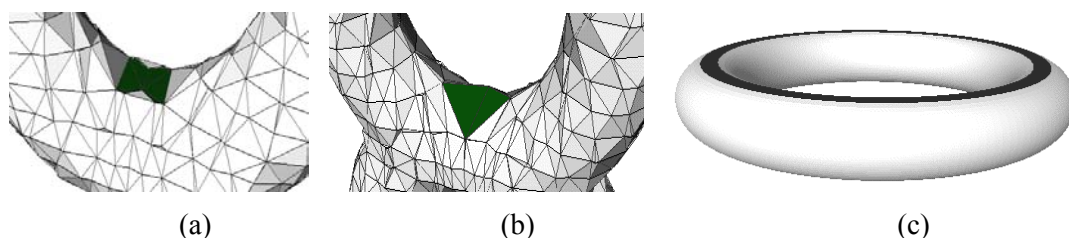


Fig. 4 Esempi di aree critiche

In pratica la classificazione delle aree critiche viene fatta contando il numero di lati non vincolati della frontiera di ciascuna area critica e verificando quante direzioni di salita e discesa sia esternamente presenti.

La nozione di area critica, purtroppo, non è sufficiente a descrivere completamente il comportamento topologico della superficie in un intorno delle regioni di sella in quanto risente dei cambi topologici che avvengono in modo locale. Per ovviare a questo limite e meglio capire se ad una fissata quota avviene un cambio di topologia collegato alla regione in esame viene introdotta la nozione di zona di influenza. La zona di influenza di un'area critica è la regione minimale della triangolazione che contiene tutta l'informazione topologica dell'area stessa. Più chiaramente, nel caso di aree di massimo e di minimo essa coincide con l'area critica stessa; nel caso delle regioni di sella, invece, è la parte di triangolazione compresa tra i contorni ad essa topologicamente adiacenti e aventi quota immediatamente maggiore o minore. Si può rilevare che aree di sella diverse possono avere una stessa zona di influenza, cfr. ad esempio **Fig. 5(c)** nella quale le coppie di selle aventi stessa quota hanno stessa zona di influenza. Dalla caratterizzazione delle zone di influenza si deduce che se due zone di influenza coincidono la funzione altezza non è semplice rispetto alla frequenza di campionamento considerata.

In **Fig. 5(a)**, è rappresentata la triangolazione vincolata ai contorni di un bitoro e le rispettive aree critiche, in particolare, data la simmetria dell'oggetto, esistono altre due selle e una regione di minimo non visibili nell'immagine. Le zone di influenza dello stesso bitoro sono evidenziate in **Fig. 5(b)** mentre **Fig. 5(c)** mostra come, in caso di una funzione altezza non semplice (cioè per la quale esistono almeno due punti critici aventi stessa quota), le zone di influenza, che basate sulla nozione di adiacenza topologica, coincidono.

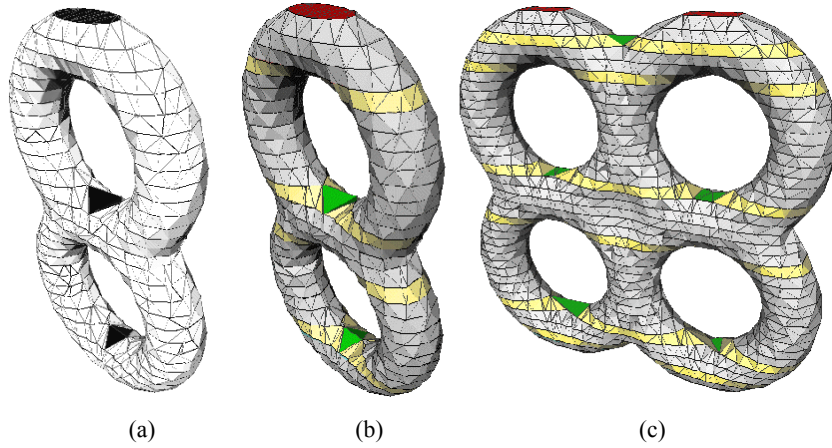


Fig. 5 Esempio di triangolazione vincolata alle sezioni orizzontali con evidenziate le aree critiche (a) e due esempi di zone di influenza (b) e (c). Le aree colorate in giallo rappresentano le zone di influenza. L'unione delle aree di sella (in verde) edel le zone di influenza evidenzia una "striscia" lungo la quale la topologia della forma cambia.

A partire dai concetti precedentemente introdotti, i nodi dell'ERG corrispondono proprio alle zone di influenza delle aree critiche in quanto rappresentano una parte di triangolazione che, in base al campionamento effettuato, può essere identificata da un unico punto. In particolare si introduce la distinzione tra *nodi* e *macro-nodi* per evidenziare con una diversa etichetta se l'area critica sia semplicemente connessa oppure multipla. Gli archi del grafo, infine, rappresentano le adiacenze topologiche tra le aree critiche e vengono individuati attraverso un processo di espansione topologica delle zone di influenza che utilizza i contorni inseriti nel modello come vincoli.

Definendo N l'insieme dei nodi ed A l'insieme degli archi dell'ERG, l'algoritmo per la costruzione dell'ERG è il seguente:

```

CharacteriseCriticalAreas();
DetectInfluenceZones(N);
LinkNodesbyInfluenceZone(N, A),
for (ogni nodo in N)
{
  for (ogni direzione di salita non ancora considerata)
  {

```

```

while (!(ReachAnotherInfluenceZone))
    UpperLevelExpansion(nodo);
ConnectAreas(nodo, nuova_area);
}
}

```

In dettaglio la funzione *CharacteriseCriticalAreas()* rileva le aree critiche a le ordina secondo la quota mentre la funzione *DetectInfluenceZones(N)* determina le zone di influenza e definisce l'insieme dei nodi N del grafo. Un primo insieme di archi viene estratto espandendo le zone di influenza delle regioni di massimo e minimo finché non viene raggiunta un'altra zona di influenza (funzione *LinkNodesbyInfluenceZone(N, A)*). In questo modo vengono si identificano gli archi terminali del grafo (cfr. **Fig. 6(b)**). La costruzione del grafo termina quando anche gli archi tra selle e aree critiche multiplamente connesse vengono inseriti. Anche questi archi vengono determinati con un processo di espansione (dove possibile) delle zone di influenza che inizia dalla regione a quota minima e segue tutte le direzioni di salita non precedentemente esaminate (cfr. **Fig. 6(c)**). Un arco viene creato tutte le volte che nel processo di espansione si incontra un'altra zona di influenza (*UpperLevelExpansion(nodo)* e *ConnectAreas(nodo, nuova_area)*). Quando tutte le possibili direzioni di salita sono state esaminate il grafo è completo.

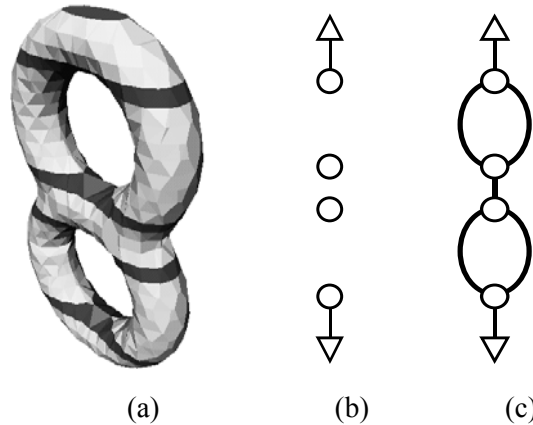


Fig. 6 Funzionamento dell'algoritmo per la costruzione dell'ERG per il bitoro.

Come rilevabile negli esempi, la configurazione finale del grafo estratto dipende dalla scelta della direzione. In ogni modo la topologia globale della superficie viene ugualmente descritta attraverso l'ERG il quale ancora soddisfa, come discusso nella prossima sezione, una versione generalizzata della cosiddetta relazione Morse, tra numero di aree critiche e caratteristica di Eulero. Siccome l'ERG varia al variare della funzione altezza scelta, che dipende strettamente dall'orientazione dell'oggetto, la scelta di tale funzione non ne fa uno strumento candidato ad essere utilizzato per propositi di classificazione e riconoscimento,

in quanto in tali ambiti si richiede un modello univoco di descrizione. Nondimeno, esso può essere considerato un valido strumento per la costruzione di uno scheletro topologico contenente un quantità minimale di informazione di una data forma digitale e risulta di fondamentale importanza nella ricostruzione di superfici a partire da sezioni, [8].

Un punto critico del metodo di costruzione dell'ERG qui proposto è la determinazione del numero di sezioni da considerare per “affettare” la superficie. Il distanza minima tra le sezioni può essere determinata scegliendo la minima distanza, rispetto alla direzione scelta, tra i vertici della triangolazione originale. Questo limite, generalmente, genera un numero troppo elevato di sezioni e dipende dalla densità dei punti originali. Un modo per valutare a priori una distanza ottimale è effettuare una prima classificazione di vertici della triangolazione valutando localmente il comportamento della superficie in un modo del tutto analogo a quello proposto da Banchoff, [4]. In questo modo si può ottenere un sezionamento che maggiormente dipende dalle caratteristiche globali della superficie. In casi pratici, quando il numero di sezioni scelto è insufficiente, in corrispondenza dei buchi sulla superficie, non è possibile rimuovere tutti i punti originali e questo fatto può essere considerato come un indicatore della correttezza topologica del grafo estratto.

3.1 Complessità computazionale dell'algoritmo

La complessità totale dell'algoritmo è data dalla somma delle operazioni necessarie all'inserimento dei contorni all'interno della triangolazione iniziale e alla semplificazione della stessa; alla caratterizzazione della triangolata alle curve di livello e all'espansione delle aree critiche.

Preventivamente all'inserimento dei vincoli nella triangolazione i lati del modello sono ordinati rispetto ai valori crescenti della funzione altezza. Questa operazione ha complessità $O(n \log(n))$, dove n rappresenta il numero di vertici della triangolazione. In questo modo l'inserimento dei contorni è semplificata, grazie all'utilizzo di 2 liste che codificano l'elenco dei lati i cui vertici hanno valori superiori ed inferiori ad una data quota. Quest'operazione viene effettuata un numero di volte pari al numero di insiemi livelli scelti dall'utente. Il costo di questa operazione è lineare nel numero di lati e quindi, utilizzando la relazione di Eulero sugli elementi della triangolazione, tale operazione costa $O(n)$ operazioni. L'eliminazione dei vertici della triangolazione che non giacciono su curve di livello (contorni) analizza localmente l'intorno di un vertice, analizzando un vertice alla volta. Siccome ad ogni passo del processo almeno un vertice viene eliminato, se ne deduce che anche questa parte del modello è lineare nel numero di vertici originariamente nel

modello (i nuovi vertici sono inseriti su curve di livello e quindi non devono essere eliminati). Il costo di tale operazione è quindi $O(n)$.

Per quanto riguarda la caratterizzazione della triangolazione vincolata ai contorni, la lista dei triangoli è considerata un triangolo alla volta, espandendolo quanto possibile. Questo processo considera ogni triangolo una volta soltanto e quindi è anch'esso lineare nel numero di triangoli del modello e quindi di vertici $O(n+m)$ dove n è il numero di vertici originariamente sul modello e m rappresenta il numero di vertici aggiunti durante l'inserimento dei contorni. Analogamente l'espansione delle aree critiche considera i triangoli non ancora classificati analizzandoli al più una volta.

L'intero processo di costruzione dell'ERG quindi è dato dal massimo tra i costi di ordinamento dei vertici originari o di espansione delle aree critiche, ossia $O(\max(n \log(n), m+n))$.

4 Equazione di Eulero estesa

Il grafo di Reeb di una varietà differenziabile M immersa regolarmente nello spazio euclideo tridimensionale effettuato rispetto ad una direzione prefissata consente di codificare semanticamente la forma della superficie in termini di massimi, minimi e passi. Sotto l'ipotesi aggiuntiva che nella direzione considerata la funzione che descrive la superficie sia Morse, la struttura del grafo di Reeb piuttosto semplice e i nodi del grafo hanno grado al più tre e gli archi possono essere orientati. La teoria di Morse consente, inoltre, di enunciare il legame che esiste tra il numero di punti critici e la topologia della superficie stessa. Tale risultato, noto con il nome di formula di Eulero, stabilisce che qualunque varietà differenziabile bidimensionale soddisfa la seguente relazione:

$$\text{maxima} - \text{saddles} + \text{minima} = 2 (1 - g) = \chi(M) \quad (1)$$

nella quale g rappresenta il genere della varietà, [16]. Il valore $\chi(M)$ è detto caratteristica di Eulero di M , ed è strettamente correlato ai cosiddetti numeri di Betti e nel caso di una sfera è uguale a 2.

Nel caso di superfici con bordo (come i modelli digitali di terreno considerati in [4][7][10], ad esempio) per caratterizzare le aree critiche che intersecano la frontiera ed eliminare ogni ambiguità interpretativa è necessario fare delle ipotesi sul comportamento esterno. In questi casi, comunemente si assume che esternamente la superficie abbia ovunque direzione discendente e si introduce l'esistenza di un minimo virtuale globale, [18]. Assumendo l'esistenza del minimo virtuale la relazione (1) può essere riscritta come segue:

$$maxima - saddles + minima + mv = 2 \quad (2)$$

dove mv rappresenta il punto di minimo virtuale.

Considerando la caratterizzazione delle triangolazioni introdotta in [4] e qui estesa alle triangolazioni 3D chiuse, viene ricercata una relazione simile a (1) che leghi tra loro le aree critiche anziché i punti critici. Ovviamente non tutte le aree piatte di una triangolazione vincolata risultano essere critiche, bensì la loro classificazione avviene semplicemente contando il numero di direzioni di salita e discesa (molteplicità) di ciascuna regione piatta, [4]. Come discusso in [10], tale molteplicità è fondamentale per attribuire un “peso” al contributo nella formul (1) di ciascuna area critica.

A livello teorico l'introduzione del minimo virtuale rende il modello topologicamente equivalente alla sfera, si richiede, quindi, che anche nella versione estesa della formula (1) il valore di $\chi(M)$ sia ancora 2, per quanto riguarda gli oggetti effettivamente tridimensionali, invece, non deve essere introdotto alcun artificio. La versione estesa della formula, inoltre, deve essere perfettamente coerente con quanto valido per varietà differenziabili. L'idea alla base della generalizzazione è la considerazione che ogni area critica corrisponde a un punto critico o, se degenera come nel caso delle aree critiche non semplicemente connesse, a un numero finito di punti critici.

Punti critici come la sella quadrupla rappresentata in **Fig. 1(a)** non sono usualmente considerati nella formula di Eulero ma è comunque possibile dare una generalizzazione sul modello di quella presentata in [30][31] contando opportunamente la molteplicità di ciascuna sella in maniera del tutto analoga dell'indice dei punti critici introdotto in [4]. Per semplicità la discussione della formula qui presentata interessa solo aree critiche semplicemente connesse che rappresentano punti critici aventi molteplicità 1 e aree critiche multiplamente connesse. A questo punto la generalizzazione della formula di Eulero può essere introdotta come segue:

$$maxima - saddles + minima - P_{mc} = 2 \quad (3)$$

dove, $P_{mc} = \sum_{c_a} mc_a$ rappresenta il contributo alla formula di Eulero derivante dalla totalità delle aree critiche multiplamente connesse. In particolare, c_a indica un'area critica “complessa” e il valore di mc_a viene espresso attraverso la relazione $mc_a = h - 1$ dove h indica il numero di componenti interne della frontiera dell'area critica c_a . La versione della formula (3) per superfici 2,5D con frontiera differisce solo per il contributo dovuto all'introduzione del punto di minimo virtuale e assume la seguente espressione:

$$maxima - saddles + minima - P_{mc} + mv = 2 \quad (4)$$

Il valore di mc_a può essere intuitivamente spiegato attraverso la considerazione che aree critiche multiplamente connesse possono essere facilmente “disaccoppiate” applicando piccole rotazioni alla superficie in esame. A questo punto il valore mc_a rappresenta il contributo portato alla formula di Eulero da tutta la regioni critica in esame. Facendo riferimento alle immagini in **Fig 7(a)** l’area di massimo evidenziata rappresenta una regione di punti di degenericità nella direzione considerata. Tale area di massimo ha solo una componente interna, perciò $h=1$ e $mc_a=0$. Se ne deduce che il contributo di tale area alla formula (3) è 0 . A tale conclusione si arriva considerando che perturbando la superficie con una piccola rotazione, come mostrato in **Fig 7(b)**, la regione critica è separata in un punto di massimo e uno di minimo e quindi il contributo alla formula in (1) è ancora 0 . Analogamente, considerando la regione di massimo, avente 2 componenti interne, rappresentata in **Fig 7(c)** si ottiene che $h=2$, $mc_a=1$ e il contributo alla formula di Eulero è -1 . Anche in questo la dimostrazione grafica in **Fig 7(d)** mostra come con una perturbazione della direzione di riferimento la configurazione critica iniziale sia sostituita da 2 punti di sella e da un massimo che, nuovamente, “pesano” -1 nella formula di Eulero.

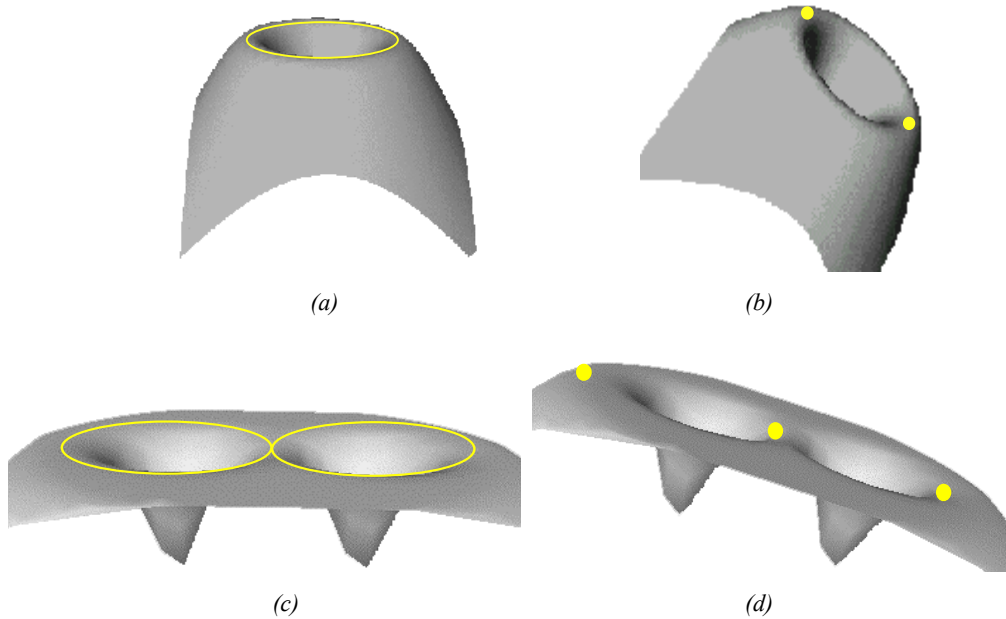


Fig 7 Esempi di trasformazione di ampie regioni critiche in punti critici non degeneri attraverso piccole rotazioni.

Considerando la relazione tra aree critiche e nodi del grafo di Reeb di può ottenere un’ulteriore giustificazione dell’equazione (4). Dalla definizione del grafo, infatti, segue che tutti i punti appartenenti a un’area critica semplicemente connessa sono equivalenti secondo Reeb e possono essere collassati nello stesso nodo. Se i punti critici di M , inoltre, fossero noti, la semplice etichettatura dei nodi del grafo effettuata in base al numero di archi

entranti sarebbe sufficiente per distinguere i punti critici degeneri. In maniera analoga comportamento degli archi incidenti in un'area critica semplicemente connessa è equivalente al comportamento degli archi incidenti in un punto critico semplice. Ne risulta che le aree critiche precedentemente introdotte possono essere rappresentate in una versione “estesa” del grafo di Reeb e, per consentire la distinzione tra aree semplicemente e multiplamente connesse, esse vengono rappresentate rispettivamente con nodi e macronodi.

5 Esempi e conclusioni

In questa sezione alcuni dei risultati dall'implementazione dell'algoritmo descritto in sezione 3 sono proposti. Il prototipo è stato sviluppato in ambiente Unix Silicon Graphics, preparando un libreria in C e utilizzando le librerie OpenInventor e Motif quali ambienti di visualizzazione.

L'estrazione del grafo viene mostrato per una caffettiera (matematicamente un oggetto di genere 1), un animale (un coniglio, un modello di genere 0) e un toro quadruplo (un modello matematico avente genere 4). Come evidenziato rispettivamente nelle figure **Fig. 8**, **Fig. 9** e **Fig. 10**, gli ERG hanno lo stesso numero di cicli del genere della superficie in esame. In particolare, **Fig. 9** evidenzia come l'ERG estratto rispetto a una direzione assegnata riconosce principalmente le caratteristiche che sono ortogonali a tale vista mentre non codifica le variazioni della forma che sono parallele ai “piani di taglio” derivanti dal campionamento della superficie.

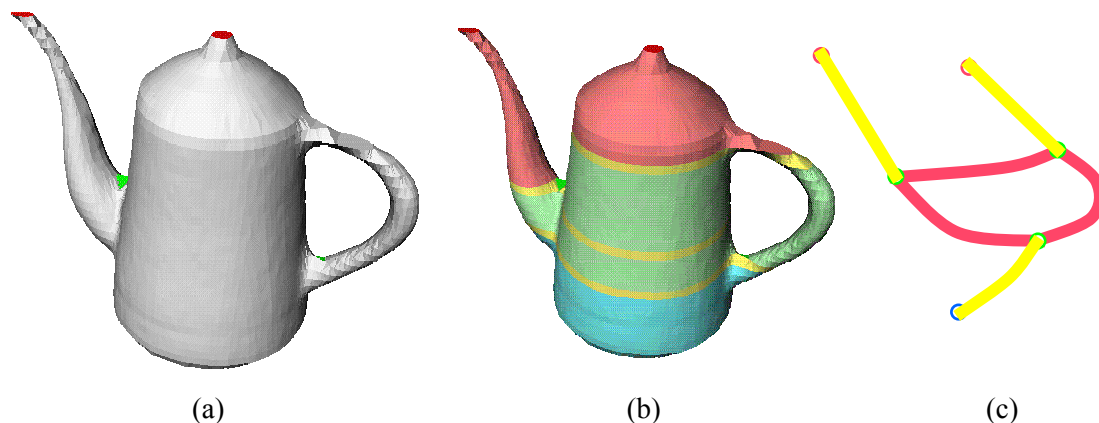


Fig. 8. Estrazione dell'ERG su un modello di caffettiera: prima di tutto le aree critiche sono riconosciute (a), poi sono espanse fino a ricoprire tutta la superficie (b). Il grafo ottenuto codifica la connettività tra le aree critiche (c). Le aree in rosso (risp. blu) rappresentano le regioni propriamente di massimo (risp. minimo), le regioni in verde scuro corrispondono alle selle mentre le regioni gialle alla loro regione di influenza, infine le regioni rosso chiaro, azzurro e verdino corrispondono all'espansione di una regione e individuano la presenza di un arco del grafo. I colori del grafo corrispondono al tipo di nodo: rosso per i massimi, blu per i minimi e verde per le selle.

Mentre il genere della superficie è un invariante per il grafo, se calcolato su un campionamento sufficiente fitto del co-dominio della funzione altezza, non sono un invariante il numero di massimi e minimo. Comunque, come visibile anche in **Fig. 9**, la relazione di Eulero lega tali rappresentazione, condizionando il numero di massimi e minimi a variare in base al numero di selle.

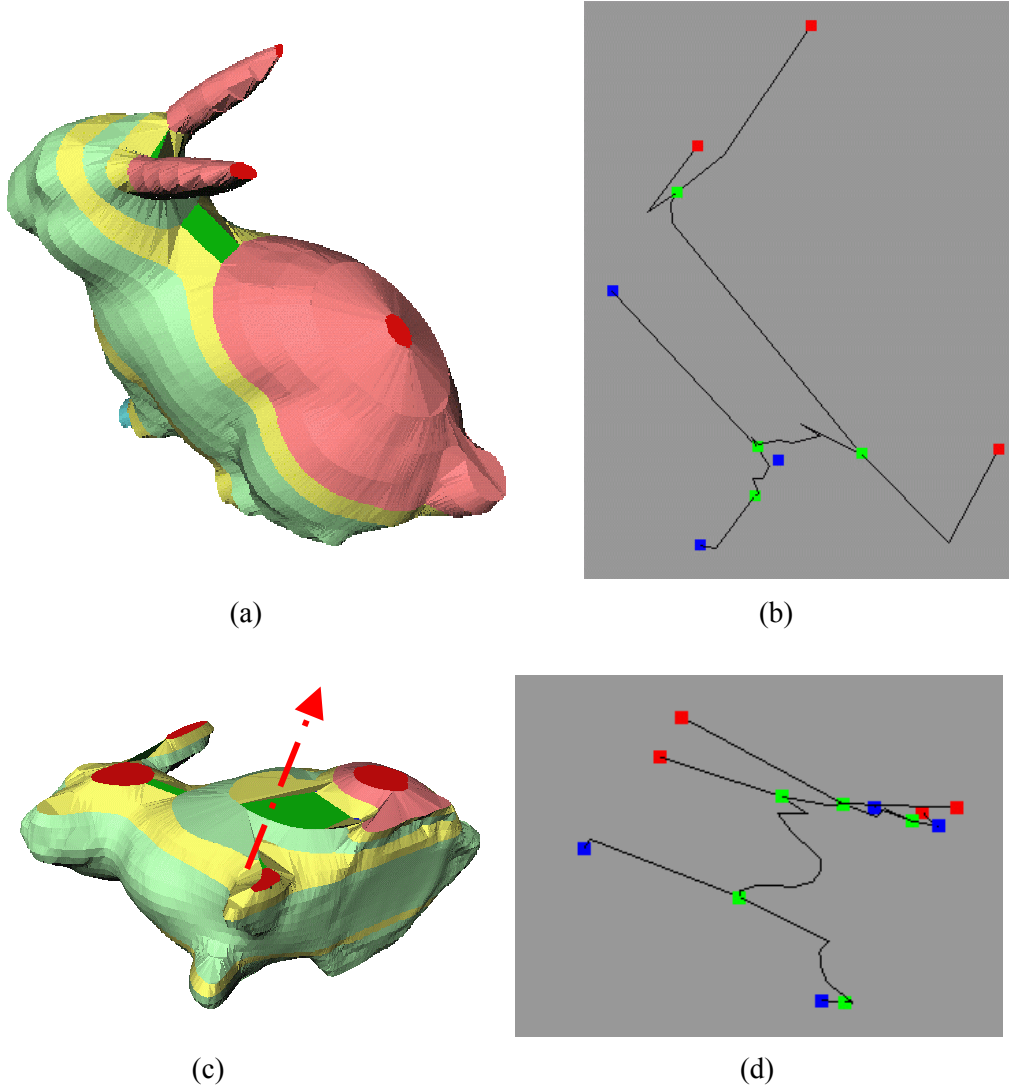


Fig. 9 Grafo di Reeb di una modello rispetto a 2 diverse funzioni altezza (b,d). La caratterizzazione fornita dalle aree critiche (a,c) è ortogonale alla direzione scelta.

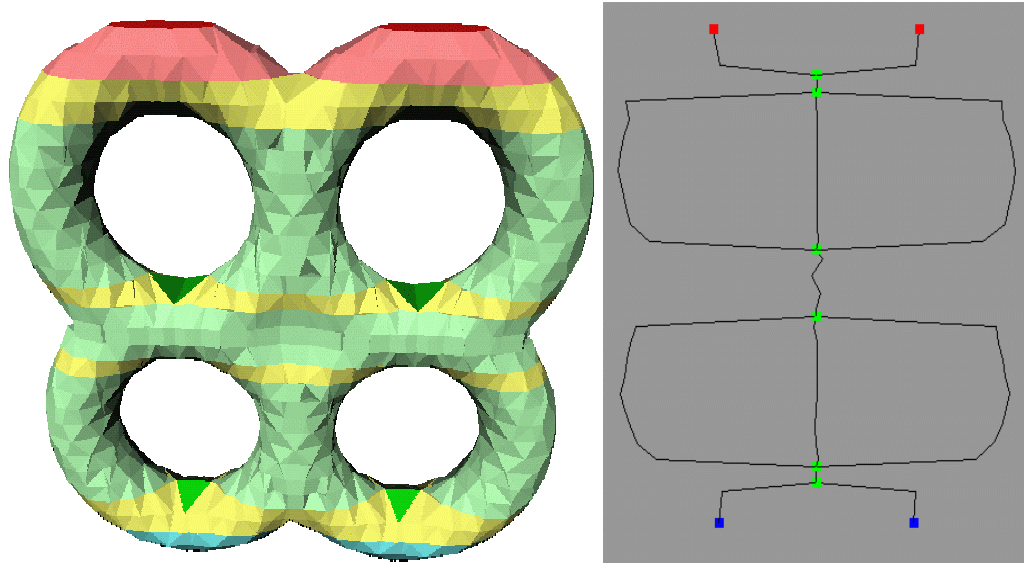


Fig. 10. Estrazione del grafo di Reeb a partire dalla triangolazioni vincolata (figura a sinistra) a un insieme di curve di livello di un toro quadruplo. Le aree di sella non sono semplici rispetto alla funzione altezza scelta in questo esempio.

Il modello fornito dall'ERG non modifica il significato semantico contenuto nel grafo di Reeb e allo tempo consente di estrarre la morfologia della superficie. Lo spazio quoziente rappresentato dall'ERG memorizza solo la relazione di inclusione e di adiacenza tra i contorni delle sezioni: questo fatto può risultare incompleto in un'eventuale fase di ricostruzione della superficie. A questo proposito si può arricchire la struttura dell'ERG aggiungendo per ogni nodo informazioni morfologiche sui contorni. Tali informazioni possono essere aggiunte ai nodi ed agli archi del grafo in modo da facilitare la fase di ricostruzione della superficie. A ciascun nodo, infatti, si può assegnare lo scheletro della sezione corrispondente in modo tale da consentire la rapida estrazione delle caratteristiche morfologiche dei contorni e l'individuazione delle corrispondenze tra le sezioni.

A ciascun nodo del grafo vengono esplicitamente assegnate sia le proprietà geometriche fornite dalla conoscenza dei punti che formano i singoli contorni sia le principali caratteristiche topologiche. Oltre alla connessione tra sezioni, inoltre, sono memorizzate esplicitamente le connessioni tra i singoli contorni. In questo modo si possono modellare anche oggetti cavi distinguendo, per ogni sezione, tra contorni interni ed esterni. La struttura ottenuta risulta, comunque, efficiente, facilmente esportabile e consente una veloce analisi topologica dell'oggetto e consente un'efficace rappresentazione della struttura scheletrica dell'oggetto. In **Fig. 11** è mostrato un esempio della triangolazione ottenuta dalla ricostruzione della caffettiera in **Fig. 8** partendo dal bordo della zone di influenza delle aree critiche.

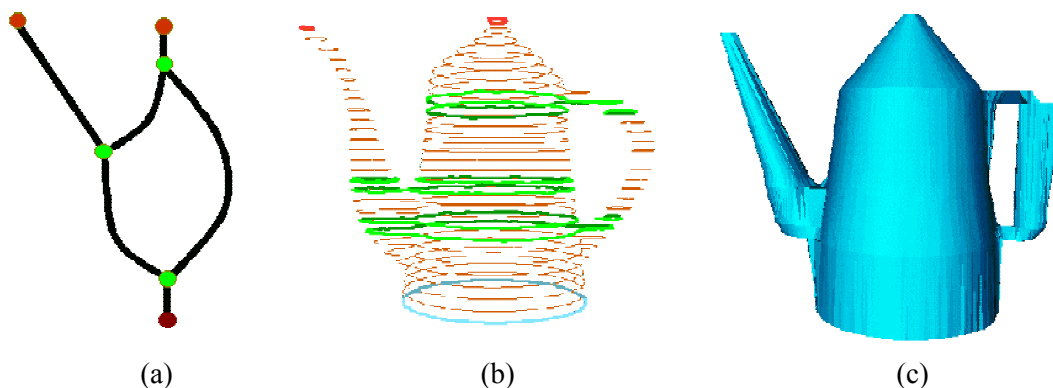


Fig. 11 Esempio di ricostruzione semplificata del modello (c) a partire dall'informazione minimale contenuta nell'ERG (a) con l'aggiunta delle curve di livello "critiche" (b) (contorni rossi, azzurri e verdi)

Se ne deduce, quindi, che la compressione fornita dall'ERG fornisce uno schizzo naturale della forma originale che può essere sfruttata sia per l'analisi della forma che per la generazione automatica di rappresentazioni iconiche. Inoltre, come futuro sviluppo di ricerca, si prevede di analizzare la dipendenza della configurazione del grafo di Reeb rispetto alla variazione della funzione scelta, in particolare quando la funzione altezza varia in un insieme significativo di viste.

Ringraziamenti

L'autore ringrazia sentitamente Bianca Falcidieno e Michela Spagnolo che hanno reso possibile la stesura di questo lavoro e hanno fornito un insostituibile supporto durante tutta la fase di preparazione dello stesso. Ringraziamenti vanno anche a tutti i componenti del gruppo di "modellazione geometrica" dell'IMA del CNR di Genova per i preziosi suggerimenti e l'incoraggiamento continuo.

Bibliografia

- [1] M. Alexa. "Merging Polyedral Shapes with Scatterd Features". *The Visual Computer*, 16, 1, pp.38-46, 2000.
- [2] G. Aumann, H. Ebner, and L. Tang, "Automatic derivation of skeleton lines from digitized contours", *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 46, 1991, pp. 259-268.
- [3] U. Axen, H. Edelsbrunner. "Auditory Morse analysis of triangulated manifolds". In H.-C. Hege, and K. Polthier eds., *Mathematical Visualization*, pp. 223-236. Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.
- [4] T. Banchoff, "Critical points and curvature for embedded polyedral surfaces", *American Mathematical Monthly*, 77:475-485, 1970. C. Bajaj, and D. R. Schikore, "Topology preserving data simplification with error bounds", *Computer & Graphics*, 22(1), 1998, pp. 3-12.
- [5] C. L. Bajaj, V. Pascucci, D. R. Schikore, "Fast isocontouring for improved interactivity", in *Proceedings 1996 SPIE Symposium on Volume Visualization*, San Francisco, 1996, pp.39-46.

- [6] C. Bajaj, D. R. Schikore, "Topology preserving data simplification with error bounds", *Computer & Graphics*, 22(1), 1998, pp. 3-12.
- [7] S. Biasotti. "Rappresentazione di superfici naturali mediante grafi di Reeb". Tesi di Laurea, Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Settembre 1998.
- [8] S. Biasotti, M. Mortara, M. Spagnuolo. "Surface compression and reconstruction based on Reeb graphs and shape analysis". In *Proceedings of the Spring Conference on Computer Graphics*, Bratislava, May 2000.
- [9] S. Biasotti, B. Falcidieno, and M. Spagnuolo, "Extended Reeb Graphs for Surface Understanding and Description" in *Proceedings of 9th Discrete Geometry for Computer Imagery conference, LCNS*, Springer Verlag, Uppsala, 2000.
- [10] S. Biasotti, B. Falcidieno, and M. Spagnuolo, "Shape Abstraction Using Computational Topology Techniques", in *Proceedings of the Seventh Workshop GEO-7* organized by the IFIP Working Group 5.2, Parma, October 2000.
- [11] H. Blum. "A transformation for extracting new descriptors of shape". In *Proc. Symp. Models for Perception of Speech and Visual form*, W. Whalen-Dunn, Ed. Cambridge, MA: MIT Press, pp. 362-380, 1967.
- [12] T. K. Dey, H. Edelsbrunner, and S. Guha, "Computational Topology", In *Advances in Discrete and Computational Geometry*, eds: Chazelle, B., Goodman, J. E., Pollack, R., *Contemporary Mathematics* 223, AMS, Providence, 1999, pp. 109-143.
- [13] R. Engelking, and K. Sielucki, *Topology: a geometric approach*, Sigma series in Pure Mathematics, Volume 4, Heldermann Verlag, Berlin, 1992.
- [14] B. Falcidieno, M. Spagnuolo. "A new method for the characterization of topographic surfaces". *International Journal of Geographical Information Systems*, Vol. 5, No. 4, 1991.
- [15] B. Falcidieno, M. Spagnuolo. "Shape Abstraction Paradigm for Modelling Geometry and Semantics". In *Proceedings of Computer Graphics International*, pp. 646-656, Hannover, June 1998.
- [16] H. Fuchs, Z. M. Kedem, and S.P. Uselton, "Optimal surface reconstruction from planar contours". *Communications of the ACM*, 20(10):693-702, October 1977.
- [17] C. Giertsen, A. Halvorsen, P. R. Flood. "Graph-directed modelling from serial sections". *The Visual Computer*, 6(5): 284-290, 1990.
- [18] V. Guillemin, and A. Pollack, A, *Differential Topology*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.
- [19] J. C. Hart. "Computational Topology for Shape Modeling". In *Proceeding of Int. Conf. on Shape Modeling and Application*, Aizu-Wakamatsu, Japan, March, 1999.
- [20] Alan D. Kalvin, Russell H. Taylor, "Surfaces: Polygonal Mesh Simplification with Bounded Error", in *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol 16, no. 3, 1996.
- [21] Y. Livnat, H.W. Shen, C.R. Johnson, "A Near optimal isosurface extraction algorithm using the span space", in *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2, 1996, pp.73-84.
- [22] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, New Jersey, 1963.
- [23] L. R. Nackman. "Two-dimensional Critical Point Configuration Graphs". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. PAMI-6, No. 4, pp. 442-450, 1984.
- [24] P. Pentland, "Perceptual organization and representation of natural form", *Artificial Intelligence*, Vol.28, 1986, pp. 293-331.
- [25] J. L. Pfaltz. "Surface Networks". In *Geographical analysis*, Vol. 8, pp. 77-93, 1990.

- [26] G. Reeb. “Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction munèrique”. *Comptes Rendus Acad. Sciences*. Paris, 222:847-849, 1946.
- [27] W. J. Schroeder, J. A. Zarge, W. E. Lorensen , “Decimation of Triangle Meshes”, in *Computer Graphics (SIGGRAPH '92 proceedings)*, vol. 26, no. 2, 1992.
- [28] Y. Shinagawa, T. L. Kunii. “Constructing a Reeb graph automatically from cross sections”. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 11(6), pp. 44-51, 1991.
- [29] Y. Shinagawa, T. L. Kunii, Y. L. Kergosien. “Surface Coding Based on Morse Theory”. *IEEE Computer Graphics & Applications*, pp. 66-78, September 1991.
- [30] G. Turk “Re-Tiling Polygonal Surfaces”, in *Computer Graphics (SIGGRAPH '92 proceedings)*, vol. 25, 1992.
- [31] Z. J. Wood, M. Desbrun, P. Schröder, D. Breen, “Semi-Regular Mesh Extraction from Volumes”, in *IEEE Visualization Conference*, Salt Lake City, October 2000.